# ITERATIVNO RJEŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

# AN ITERATIVE METHOD FOR LINEAR SYSTEMS

Dr Slobodan Lakić, vanredni profesor
Ekonomski fakultet u Brčkom

*Apstrakt. Posmatra se jedan iterativni postupak za rješavanje sistema linearnih jednačina. Dati su neki rezultati za klase H-matrica, strogo dijagonalno dominantnih, nerazloživih matrica itd.*

*Abstract. In this paper we consider an iterative method for the sistem of linear equations. Some results on H-matrices, strictly diagonally dominant and irreducible diagonally dominant matrices, e.t.c. are given.*

## UVOD

Dajemo neke oznake i definicije koje ćemo koristiti u daljem radu:
R- skup realnih brojeva.
$R^n$ - skup *n*-dimenzionih realnih vektora.
$R^{n,n}$ - skup realnih kvadratnih matrica reda *n*.
$K^{n,n}$ - skup kompleksnih kvadratnih matrica reda *n*.

$$P_i(A)=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\ Q_i(A)=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}|a_{ji}|,\ P_{i,r}(A)=rP_i(A)+(1-r)Q_i(A),0\leq r\leq 1.$$

$$M(A)=[c_{ij}]\in R^{n,n},c_{ii}=|a_{ii}|,i=1,2,...,n,c_{ij}=-|a_{ij}|,i,\ j=1,2,...,n,i\neq j,A=[a_{ij}]\in K^{n,n}.$$

Matrica $A\in R^{n,n}$ je M-matrica ako i samo ako njena inverzna matrica ima nenegativne elemente i ako je $a_{ii}>0,i=1,2,...,n,a_{ij}\leq 0,i,\ j=1,2,...,n,i\neq j.$

Kompleksna kvadratna matrica A je H-matrica ako samo ako je M(A) M-matrica.

## KONVERGENCIJA

U ovom dijelu rada ispituje se konvergencija iterativnog postupka iz rada $[1]$. Rezultati u ovom dijelu rada su prirodan nastavak rezultata iz rada $[1]$. Konvergencija je ispitana za neke standardne klase matrica .
Posmatra se sistem linearnih jednačina
$Ax=b,A\in R^{n,n},b\in R^n$, gdje je A regularna matrica.
Za rješavanje ovog sistema može se koristiti iterativni postupak

$$(1): x^0\in R^n, x^{k+1}=Bx^k+d, B=I-M^{-1}A, d=M^{-1}b, k=1,2,...,$$

M je tridijagonalna matrica, I je jedinična matrica.

Teorem 1. Neka je $A=[a_{ij}]\in R^{n,n}$ H-matrica, $M=[m_{ij}]\in R^{n,n}$ regularna tridijagonalna matrica,

$$\min_i\frac{m_{ii}}{a_{ii}}\geq\frac{1}{2},i=1,2,...,n,\frac{m_{ij}}{a_{ij}}\in\left[1-\min_i\frac{m_{ii}}{a_{ii}},\min_i\frac{m_{ii}}{a_{ii}}\right],\text{ za } a_{ij}\neq 0,i,\ j=1,2,...,n,i\neq j,\text{ gdje je}$$

$m_{ij}=0$ za one indekse i,j za koje je $a_{ij}=0.$
Tada je iterativni postupak (1) konvergentan.

Dokaz: Iz uslova teoreme slijedi da interval $\left[1-\min_i \frac{m_{ii}}{a_{ii}}, \min_i \frac{m_{ii}}{a_{ii}}\right]$ nije prazan. Pored toga imamo za

$a_{ij} \neq 0, i, j = 1,2,\ldots,n, i \neq j, \frac{m_{ii}}{a_{ii}} \geq \min_i \frac{m_{ii}}{a_{ii}} \geq \frac{m_{ij}}{a_{ij}}, \quad \frac{m_{ij}}{a_{ij}} \geq 1 - \min_i \frac{m_{ii}}{a_{ii}} \geq 1 - \frac{m_{ii}}{a_{ii}},$ odakle je

$\frac{m_{ii}}{a_{ii}} + \frac{m_{ij}}{a_{ij}} \geq 1.$ Sada na osnovu teoreme iz rada [1] slijedi dokaz teoreme.

Teorem 2. Neka je $A \in R^{n,n}$ strogo dijagonalno dominantna ili nerazloživa dijagonalno dominantna matrica i vaze uslovi prethodne teoreme tada je postupak (1) konvergentan.
Dokaz: Iz uslova teoreme slijedi da je matrica A H-matrica pa na osnovu prethodne teoreme slijedi dokaz.
Sljedeća teorema daje jedno gornje ograničenje za spektralni radijus matrice postupka (1).

Teorem 3. Neka je $A = [a_{ij}] \in K^{n,n}, M = [m_{ij}] \in K^{n,n}, |m_{ii}| > P_{i,r}(M), 0 \leq r \leq 1.$ Tada je

$$\rho(B) \leq \max_i \frac{P_{i,r}(M) + P_{i,r}(A) + |m_{ii} - a_{ii}|}{|m_{ii}| - P_{i,r}(M)}, i = 1,2,\ldots,n.$$

Dokaz: Iz uslova teoreme slijedi da je matrica M regularna. Pretpostavimo da za neku svojstvenu vrijednost z matrice B je

$|z| > \frac{P_{i,r}(M) + P_{i,r}(A) + |m_{ii} - a_{ii}|}{|m_{ii}| - P_{i,r}(M)}, i = 1,2,\ldots,n.$ Neka je C=(1-z)M-A. Sada je

$$|c_{ii}| = |(z-1)m_{ii} + a_{ii}| \geq |z||m_{ii}| - |m_{ii} - a_{ii}| > |z|P_{i,r}(M) + P_{i,r}(M) + P_{i,r}(A) \geq |z-1|P_{i,r}(M) + P_{i,r}(A) \geq$$

$r \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |(1-z)m_{ij} - a_{ij}| + (1-r) \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |(1-z)m_{ji} - a_{ji}| = P_{i,r}(C).$ Ovo znači da je matrica C strogo dijagonalno dominantna pa je regularna. Sada je matrica $B - zI = M^{-1}C$ regularna, a to je u suprotnosti da je z svojstvena vrijednost matrice B.

Sljedeće teoreme daju kriterijume konvergencije postupka (1) za onu klasu matrica za koju parametar $0 \leq r \leq 1$ zadovoljava uslov $|a_{ii}| > P_{i,r}(A), i = 1,2,\ldots,n.$

Teorem 4. Neka za matrice $A = [a_{ij}] \in K^{n,n}, M = [m_{ij}] \in K^{n,n},$ važi

$$a_{ii}, m_{ii} \in R, a_{ii} > P_{i,r}(A), 0 < m_{ii} \leq a_{ii}, 0 \leq r \leq 1, P_{i,r}(M) < m_{ii} - \frac{a_{ii} + P_{i,r}(A)}{2}, i = 1,2,\ldots,n.$$

Tada je postupak (1) konvergentan.
Dokaz: Iz uslova teoreme slijedi da je matrica M regularna jer je $m_{ii} > P_{i,r}(M).$ Takođe je i matrica A regularna. Na osnovu prethodne teoreme je

$$\rho(B) \leq \max_i \frac{P_{i,r}(M) + P_{i,r}(A) + a_{ii} - m_{ii}}{m_{ii} - P_{i,r}(M)} < \frac{a_{ii} + P_{i,r}(A)}{2(m_{ii} - P_{i,r}(M))} < \frac{2(a_{ii} + P_{i,r}(A))}{2(a_{ii} + P_{i,r}(A))} = 1, i = 1,2,\ldots,n.$$

Teorem 5. Neka za matrice $A = [a_{ij}] \in K^{n,n}, M = [m_{ij}] \in K^{n,n}$ važi

$$a_{ii}, m_{ii} \in R, m_{ii} \ge a_{ii} > P_{i,r}(A), 0 \le r \le 1, P_{i,r}(M) < \frac{a_{ii} - P_{i,r}(A)}{2}, i = 1,2,...,n.$$

Tada je postupak (1) konvergentan.

Dokaz: Iz uslova teoreme slijedi da je matrica A regularna. Osim toga je

$P_{i,r}(M) < \frac{a_{ii} - P_{i,r}(A)}{2} \le \frac{a_{ii}}{2} < a_{ii} \le m_{ii}, i = 1,2,...,n,$ odakle slijedi da je matrica M regularna.

Koristeći Teorem 3. imamo

$$\rho(B) \le \underset{i}{x} \frac{P_{i,r}(M) + P_{i,r}(A) + m_{ii} - a_{ii}}{m_{ii} - P_{i,r}(M)} < \frac{P_{i,r}(A) - a_{ii} + m_{ii} + (a_{ii} - P_{i,r}(A))/2}{m_{ii} - P_{i,r}(M)} =$$

$$\frac{m_{ii} - (a_{ii} - P_{i,r}(A))/2}{m_{ii} - P_{i,r}(A)} < \frac{m_{ii} - P_{i,r}(M)}{m_{ii} - P_{i,r}(M)} = 1, i = 1,2,...,n.$$

Iz prethodne dvije teoreme za slučaj r = 1 dobivaju se kriterijumi konvergencije za klasu strogo dijagonalno dominantnih matrica.

**LITERATURA:**

1. Lakić S.:Konvergencija jednog iterativnog postupka, Zbornik radova Ekonomskog fakulteta, Brčko, 2001, str. 435-439.